CP4 Mathematical Methods 2 答卷评分报告

对象：2025 CP4 Mathematical Methods 2 试卷 A10289H1；学生手写答卷 25cp4.pdf。
评分口径：无官方 mark scheme；以下按题目要求独立完成标准解后，与学生答卷逐题核对。试卷要求为 Section A 全做，Section B 选做三题；本答卷选做 B8、B10、B11。

估计总分：74 / 100

Section A：33 / 40。Section B：41 / 60。主要失分集中在 A7 的二阶 Taylor 展开、B8(d) 未完成通量端、B10(e) 漏做、B11 的涡量/环量推导。

1. 总分表

题号	满分	得分	主要判断
1	4	4	两个极限正确。
2	6	5	拍频与非色散关系基本正确；group velocity 表述和图中标注不够明确。
3	5	5	Jacobian 反演结果正确，尽管书写较乱。
4	7	7	边缘分布与期望全对。
5	7	5	区域、投影思路正确；最终漏掉 dS 的 $\sqrt{2}$ 因子。
6	6	6	直线路径参数化与积分正确。
7	5	1	只做了一阶展开；关键的 λ^2 项被漏掉，因此没有得到扩散方程。
Section A	**40**	**33**	
8	20	17	(a)(b) 基本全对；(d) 只算了体积分，未真正完成 divergence theorem 的两边验证。
10	20	16	(a)-(d) 很好；(e) normal coordinates、动能与能量分配未作答。
11	20	8	(a) 对；(b)-(d) 没有识别 $\partial\omega/\partial t=0$，curl identity 与移动曲线处理出错。
Section B	**60**	**41**	
总计	**100**	**74**	

2. 总体评价

这份答卷的基础计算能力较强：极限、概率密度积分、直线路径功、normal modes 的本征值/本征向量都处理得不错。失分不是因为整体数学能力不足，而是集中在三类典型问题：

- **“最低需要阶数”的判断**：A7 必须展开到 λ^2，因为 $\pm\lambda$ 的一阶项相消；只做一阶必然得不到空间二阶导数。
- **几何积分中的 measure 因子**：A5 的 cone surface element 漏掉 $\sqrt{2}$；B8(d) 只做了 volume side，没有计算 boundary flux side。
- **向量恒等式与物理量的结构识别**：B11 中 $-\nabla p/f(p)$ 是某个 p 的函数的梯度，因此 curl 为零；这个结构识别会直接简化整题。

按这份卷子的风格，后续提分最快的是：每道题先写出“目标对象”和“measure/边界/阶数”，再开始代数。答卷中有不少推导能做对，但最后一问经常漏写或没有闭合验证。

3. Section A 逐题评分

Q1 极限 [4] - 得分 4/4

标准结果：

```
lim_{x->0} [cos(2x)-1]/x^2 = -2
lim_{x->1} [ln x + 1 - x]/(e^x-e)^2 = -1/(2e^2)
```

评价：学生两问结果均正确。第二个极限用 L'Hopital/展开均可；学生最终给出 -1/(2e^2)，无实质扣分。

Q2 两个近频平面波的叠加 [6] - 得分 5/6

标准思路：取传播相位为 ωt-kx，则

```
y_+ + y_- = 2A sin(ω0 t - k0 x) cos(δω t - δk x)
包络速度：v_g = δω/δk
非色散介质：ω/k = 常数 = ω0/k0，所以 δω = (ω0/k0) δk
```

snapshot 中应清楚标出 carrier wavelength λ0 = 2π/k0，以及 envelope wavelength λg = 2π/δk；若标的是相邻包络节点，则间距为 π/δk。

学生表现：三角恒等式和非色散关系基本正确，图也体现了快振荡与慢包络。扣 1 分：group velocity 在 (a) 中没有以清晰句子给出，符号约定也没有说明；图中“特殊波长”标注不够规范。

Q3 Jacobian 反演 [5] - 得分 5/5

标准结果：令

```
J = u_s v_t - u_t v_s
```

则

```
ds = (v_t du - u_t dv)/J
dt = (-v_s du + u_s dv)/J
(∂s/∂v)_u = -u_t/J
```

学生表现：过程非常拥挤，但矩阵反演结果与最后对比 ds = s_u du + s_v dv 的系数是正确的。建议正式答卷中直接写成 2x2 矩阵求逆，省去大段重复微分，降低错抄风险。

Q4 联合概率密度 [7] - 得分 7/7

标准结果：

```
f_X(x) = (5/2) x^4,    -1 <= x <= 1
f_Y(y) = 10/3 - 10y + (20/3)y^{3/2},    0 <= y <= 1
E[X^2] = 5/7
```

评价：学生对 y 固定时的 x 区域分裂 [-1,-√y] ∪ [√y,1] 处理正确，积分结果正确。

Q5 圆锥面面积分 [7] - 得分 5/7

标准解：圆锥 3-z = r，其中 r = √(x²+y²)，z=3-r。z 从 1 到 2 对应 r 从 2 到 1，即 r ∈ [1,2]。参数化为

```
X(r,θ) = (r cosθ, r sinθ, 3-r),    1 <= r <= 2
```

面积元为

```
dS = |X_r × X_θ| dr dθ = √2 r dr dθ
```

因此

```
∫_Ω (3-z)x^2 dS
= ∫_0^{2π} ∫_1^2 (r)(r^2 cos^2θ)(√2 r) dr dθ
= (31√2/5)π
```

学生表现：知道投影到 xy 平面，并且半径范围 [1,2] 正确；但最后结果写成 31π/5，漏掉了 dS 相对 dA 的 $\sqrt{2}$ 因子。此类题先写参数化和 |X_r×X_θ|，比用法向夹角更稳。

Q6 沿直线路径做功 [6] - 得分 6/6

标准结果：路径可写为

```
r(λ) = (λ,2λ,2λ),    1 <= λ <= 2,
|r| = 3λ,    dr = (1,2,2)dλ
```

积分给出

```
W = ∫ F · dr = ∫_1^2 [12 C1 λ^3 - C2/(9λ^3)] dλ
  = 45 C1 - C2/24
```

评价：学生路径参数化、单位径向向量处理和最终积分均正确。

Q7 随机游走/气体动力学 Taylor 展开 [5] - 得分 1/5

标准解：需要展开到二阶：

```
ρ(x±λ,t-τ) = ρ ± λρ_x - τρ_t + (λ²/2)ρ_xx + ...
```

代回平均后，一阶空间项相消：

```
ρ = ρ - τρ_t + (λ²/2)ρ_xx + ...
=> ρ_t = (λ²/(2τ)) ρ_xx
```

若 (x0,t0) 是 space-time critical point，则 ρ_t=0，由 PDE 得 ρ_xx=0；仅凭这些不能判定其为极大、极小或鞍点，且该临界点是退化的。

学生表现：只做了一阶展开，因此得到的只是 ρ_t=0 或没有有效 PDE。关键失误是没有注意题目要求“lowest order required to obtain a PDE relating time derivative to spatial derivatives”，这里最低阶就是二阶 λ^2。

4. Section B 逐题评分

Q8 Toroidal coordinates / divergence theorem [20] - 得分 17/20

小问	满分	得分	评价
(a)	5	5	Jacobian magnitude J = r(R0+r cosθ) 正确。
(b)	5	5	Surface area $4\pi^2 R0a$，volume $2\pi^2 R0a^2$ 正确。
(c)	3	3	定理公式与符号解释基本够用。
(d)	7	4	体积分算对，但没有完成边界通量 RHS 的计算，所以“verify”不完整。

标准关键式：

```
dV = r(R0+r cosθ) dr dθ dφ
```

对于区域 a/2 <= r <= a, 0 <= θ <= π, 0 <= ϕ <= 2π：

```
LHS = ∫_V ∇·F dV = ∫_V 1 dV = (3/4)π²R0a²
```

RHS 边界通量：z=0 平面上 F=0，无通量；r=a 和 r=a/2 两个曲面贡献分别为

```
Φ_outer = π²R0a²
Φ_inner = -π²R0a²/4
Φ_total = (3/4)π²R0a²
```

故两边相等。学生只展示了 LHS；这类“verify theorem”题必须明确算出 both sides。

Q10 Coupled oscillators [20] - 得分 16/20

小问	满分	得分	评价
(a)	4	4	运动方程正确。
(b)	4	4	两 normal-mode frequencies 正确。
(c)	4	4	两个 x2/x1 比值正确。
(d)	4	4	初值展开正确。
(e)	4	0	未有效作答。

标准结果汇总：令 m1=m, k1=k，则

```
x'' = -(k/m) [[2,-1],[-1/2,2]] x
ω_±² = (k/m)(2 ± 1/√2)
```

对应本征向量可取

```
e_+ = (1, -1/√2),    e_- = (1, +1/√2)
```

初始条件 x(0)=0, x1'(0)=u, x2'(0)=0 给出

```
x1(t) = u/(2ω_+) sin(ω_+ t) + u/(2ω_-) sin(ω_- t)
x2(t) = -u/(2√2 ω_+) sin(ω_+ t) + u/(2√2 ω_-) sin(ω_- t)
```

(e) 应写：取 normal coordinates q_± 使

```
x = q_+ e_+ + q_- e_-
```

由于 e_+ 与 e_- 在质量矩阵 M=diag(m,2m) 下正交，且 e_±^T M e_± = 2m：

```
T = (1/2) x_dot^T M x_dot = m(q_dot_+² + q_dot_-²)
```

初始时 q_dot_+(0)=q_dot_-(0)=u/2，所以两 normal modes 的能量相等，各占总能量的 1/2。

Q11 Vector calculus / circulation [20] - 得分 8/20

小问	满分	得分	评价
(a)	3	3	乘积 curl 恒等式正确。
(b)	3	1	写出了 curl 的形式，但未识别最终为 0。
(c)	8	3	知道用 Stokes/面积积分，但 Ω 项求导和 curl factor 错，闭合曲线上的梯度项未清理干净。
(d)	6	1	没有利用给定初始 u 计算 vorticity，也没有处理半径 a(t) 造成的移动边界贡献。

(a) 标准：

```
∇×(φA) = ∇φ × A + φ(∇×A)
```

(b) 关键结构：

```
(∂u/∂t)_r = -∇p/f(p) = -∇F(p), 其中 F'(p)=1/f(p)
=> (∂ω/∂t)_r = ∇×(∂u/∂t)_r = 0
```

等价地，用乘积公式：∇(1/f(p)) 与 ∇p 平行，叉积为零，且 ∇×∇p=0。

(c) 静止闭合曲线 C：

```
Γ = ∮_C (u + Ω×r)·dr
∂Γ/∂t = ∮_C [∂u/∂t + ∂Ω/∂t × r]·dr
```

第一项为闭合曲线上的梯度线积分，等于 0。又 ∇×(Ω_dot × r)=2Ω_dot，因此

```
(∂Γ/∂t)_r = 2A d/dt[sin(t/t0)/t0]
          = 2A cos(t/t0)/t0²
```

(d) 移动圆周：在 xy 平面上，给定初始速度场的 z 分量涡量为

```
ω_z(t0) = ∂u_y/∂x - ∂u_x/∂y = (x²+y²)/(a0² t0)
```

由 (b)，ω_z 随时间不变。对半径 a(t)=a0 t/t0 的圆盘，

```
Γ_u(t) = ∫_disk ω_z dA = π a(t)^4/(2a0² t0)
Γ_Ω(t) = 2Ω_z A(t) = 2π a(t)^2 sin(t/t0)/t0
```

因此

```
dΓ/dt = 2πa0² t³/t0^5
       + 4πa0² t sin(t/t0)/t0^3
       + 2πa0² t² cos(t/t0)/t0^4
```

学生在本题的主要问题是没有把 -∇p/f(p) 看成梯度场，所以后续引入了不必要且错误的 curl 项；此外把 ∇×(Ω×r) 的系数写错，且没有处理 a(t) 变化导致的边界项。

5. 具体改进建议

5.1 Taylor 展开题：先判断“哪个最低阶不会相消”

A7 这类题不要机械“一阶近似”。当表达式含 ρ(x+λ)+ρ(x-λ) 时，空间一阶项必然相消，所以若题目要求出现空间导数，必须保留 $\lambda^2\rho_{xx}$。建议在草稿上先写：

```
odd powers cancel; first surviving spatial term is O(λ²)
```

5.2 面/体积分：每次先写 measure

A5、B8 都说明了同一件事：区域看懂以后，真正决定分数的是 dS 或 dV。建议固定流程：

- 参数化 X(u,v) 或坐标变换；
- 立刻写 |X_u×X_v| 或 Jacobian；
- 最后再代 integrand。

这样能避免 A5 漏 $\sqrt{2}$，也能让 B8(d) 的各边界面更清楚。

5.3 “验证定理”必须算两边

B8(d) 不是“用 divergence theorem 求体积分”，而是 verify。最低要求是：

```
LHS = ∫_V ∇·F dV
RHS = ∮_{∂V} F·n dS
show LHS = RHS
```

只写其中一边，即使数值正确，也不能拿满。

5.4 向量分析：优先识别梯度场和闭合曲线

B11 的核心捷径是：

```
-∇p/f(p) = -∇F(p),  F'(p)=1/f(p)
```

因此它的 curl 为零，闭合曲线积分也为零。考试中看到 “function of p times ∇p” 时，应立即联想到链式法则和 exact differential。

5.5 最后一问不要留空

B10(e) 是 4 分，属于可通过前面结果直接补出的部分。你已经有 eigenvectors，只差把 x 写成 normal coordinates 并用质量矩阵算 T。此类题如果时间紧，也应至少写出：

```
x = q_+ e_+ + q_- e_-,   T = (1/2) q_dot^T (E^T M E) q_dot
```

这通常能拿到过程分。

6. 结论

这份答卷估计分为 **74/100**。表现最好的部分是基础计算、概率积分和耦合振子的 eigenproblem。主要提分空间在“题目要求的完整性”：需要把推导闭合到题目真正问的对象，尤其是 PDE 的阶数、surface/volume element、定理两边验证、normal coordinates、以及 vector calculus 中的结构性化简。

若按下次同类卷子的备考优先级排序：A7 型 Taylor PDE、A5/B8 型几何积分、B11 型 Stokes/curl/closed-loop 题应优先复盘。