CP3 Mathematical Methods 1 学生答案评分报告

依据：2025 Trinity Term Preliminary Examination in Physics, Paper CP3；学生手写答案 25cp3.pdf。

项目	内容
作答要求	Section A 全部作答；Section B 选答三题。
学生实际作答	Section A: Q1-Q6；Section B: Q7，Q8，Q10。选择符合要求，Q9 未作答不计入。
总分结构	Section A 40 分；Section B 三题共 60 分；总分 100 分。
评分口径	采用“理解优先”的牛津式阅卷口径：若核心方法、结论和题意理解正确，仅有轻微表述或严谨性不足，不作重扣；但概念性错误、几何解释错误、关键条件遗漏会扣分。
特殊说明	第 4 题(b)按题意理解为 Re(z²/e^{iα}) = c²；学生的极坐标处理与这一理解一致。

一、总评与分数汇总

题目	满分	建议得分	主要判断
Q1	6	6.0	复数指数、主值对数全部正确。
Q2	6	5.5	不等式证明正确；等号条件基本正确，但零向量边界情形表述略不完整。
Q3	5	5.0	三组线性方程结论正确。
Q4	7	6.5	极坐标方法正确；草图应更明确标出旋转角、渐近线和开口方向。
Q5	7	6.0	核心判断正确；向量空间公理和 unitary 非子空间的证明可更系统。
Q6	9	9.0	两道 ODE 均正确，包括 x=1 处条件判断。
Q7	20	14.5	特征值与 A^n b 正确；A 是否正交与几何变换解释有关键错误。
Q8	20	20.0	向量几何、平面、球面交线均正确。
Q10	20	20.0	耦合 ODE 与 Chebyshev 型替换均正确。
合计	100	92.5	高 distinction 水平；主要失分集中在 Q7 的正交矩阵判定和几何解释。

判定：这份答案整体非常强，Section A 基本稳定满分，Section B 中 Q8、Q10 接近或达到满分。Q7 的失分不是计算能力问题，而是两个概念点没有扣紧：orthogonal matrix 的定义，以及线性变换在 Cartesian geometry 中的几何含义。

二、逐题评分与核对

Q1 复数表达式实部虚部（6/6）

参考答案：
(a) e^{iπ/3}-e^{-iπ/3}=2i sin(π/3)=i√3，所以 Re=0，Im=√3。
(b) i^i=exp(i Log i)=exp(-π/2)，所以 Re=e^{-π/2}，Im=0。
(c) ln(1+i)=ln√2+iπ/4。

学生核对：学生答案三项全部正确。第 (b)(c) 默认采用 principal branch；在这种考试语境下可接受。

扣分点：无实质扣分。若要更严谨，第 (b)(c) 可明确“取主值”。

得分：6.0 / 6

Q2 向量三角不等式平方形式（5.5/6）

参考答案：$|a+b|^2=|a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos\theta$。由于 $-1\leqslant\cos\theta\leqslant1$，得到 $(|a|-|b|)^2\leqslant|a+b|^2\leqslant(|a|+|b|)^2$。上等号在非零向量同向时成立；下等号在非零向量反向时成立；若其中一个为零，两边等号同时退化成立。

学生核对：学生用 $\cos\theta$ 夹逼，主证明正确。等号条件也基本写出：同向、反向，以及零向量情形。

扣分点：扣 0.5 分：零向量边界情形没有和两个等号条件完全整合，表述略松。核心理解无问题。

得分：5.5 / 6

Q3 线性方程组（5/5）

参考答案：
(a) (x,y)=(-1,1)。
(b) 无穷多解，6x+2y=1，即 y=1/2-3x。
(c) 无解。

学生核对：学生三项结果均正确，并且能识别相容、退化和不相容三类情况。

扣分点：无扣分。

得分：5.0 / 5

Q4 复数辐角与 Argand 曲线（6.5/7）

参考答案：
(a) 对 z1=r1e^{iθ1}，z2=r2e^{iθ2}，z1/z2=(r1/r2)e^{i(θ1-θ2)}，所以 arg(z1/z2)=arg(z1)-arg(z2)，严格地说在 modulo 2π 意义下成立，且 $z2\neq0$。
(b) 题式按 $\mathrm{Re}(z^2/e^{i\alpha})=c^2$ 处理。令 $z=re^{i\theta}$，得 $r^2\cos(2\theta-\alpha)=c^2$。$\alpha=0$ 时为 $x^2-y^2=c^2$，是沿实轴开口的矩形双曲线。$\alpha=\pi/3$ 时为 $(x^2-y^2)/2+\sqrt{3}xy=c^2$，即同一双曲线旋转 $\alpha/2=\pi/6$；渐近线方向为 $\theta=\pi/6\pm\pi/4$。

学生核对：学生最终使用极坐标完成 (a)，思路正确。(b) 写出 $r^2\cos(2\theta-\alpha)=c^2$，并分别给出 $\alpha=0$ 和 $\alpha=\pi/3$ 的草图；这是本题的核心。

扣分点：扣 0.5 分：第 (a) 未说明 modulo 2π 和 $z2\neq0$；第 (b) 图上旋转角、渐近线和顶点标注不够清晰，但没有本质误读。

得分：6.5 / 7

Q5 Hermitian 与 unitary 矩阵 (6/7)

参考答案:
(a) 2×2 Hermitian 矩阵在实数域上构成向量空间：零矩阵 Hermitian；若 A□=A，B□=B，$\alpha,\beta\in R$，则 $(\alpha A+\beta B)□=\alpha A+\beta B$；加法结合律、交换律、分配律等由矩阵运算继承；加法逆元 -A 仍 Hermitian。
(b) unitary 矩阵不构成该向量空间的子空间。理由可以是：零矩阵不是 unitary；一般 unitary 不一定 Hermitian；并且 unitary 集合不对加法或实数倍封闭。

学生核对：学生抓住了 (a) 的关键闭包：实线性组合仍 Hermitian；(b) 判断“unitary 不形成子空间”正确，并指出 unitary 和 Hermitian 条件并不等同。

扣分点：扣 1 分：第 (a) 没有系统列出零元、加法逆元和继承公理；第 (b) 证明方式不够直接，建议以后用“0 不在集合中”或“不封闭”一击结束。

得分：6.0 / 7

Q6 一阶 ODE (9/9)

参考答案:
(a) 因 d(y 1n x)/dx = y′ 1n x+y/x，所以 y 1n x=1/2 e^{2x}+C，y=(e^{2x}/2+C)/1n x。若希望 x→1 有有限极限，须 C=-e²/2，此时极限为 e²，不是 0；因此不能过 (1,0)。
(b) 令 t=y+x²，则 t′ =y′ +2x=(t²+1)/t。分离变量得 1/2 1n(t²+1)=x+C，即 1/2 1n((y+x²)²+1)=x+C。

学生核对：学生两部分方法和结论都正确。第 (a) 对 x=1 奇点附近的极限判断正确；第 (b) 的代换 t=y+x² 是标准且高效的做法。

扣分点：无扣分。

得分：9.0 / 9

三、Section B 逐题评分

Q7 实对称矩阵、特征值与几何变换（14.5/20）

参考答案要点：

(a) 实对称矩阵的特征值为实数；不同特征值对应的特征向量正交；可选取一组正交归一特征向量基，并可被正交矩阵对角化。

(b) A=3I-2J。特征值为 3,3,-3；λ=3 的特征空间是 x+y+z=0，例如 (1,0,-1)^T，(1,-2,1)^T；λ=-3 的特征向量可取 (1,1,1)^T。A 不是 orthogonal matrix，因为 A^T A=9I≠I；只有 A/3 是 orthogonal。

(c) b=(1,1,1)^T 是 λ=-3 的特征向量，所以 A^n b=(-3)^n b。几何上，A 是“关于平面 x+y+z=0 的反射”再整体放大 3 倍；等价地，在法向 (1,1,1) 上乘 -3，在该平面内乘 +3。

学生核对：学生的特征多项式根、特征值和一组特征向量基本正确；即使特征多项式整体差一个符号，根不受影响，不应重扣。A^n b 的计算也正确。

扣分点：主要扣分：

1. (a) 性质陈述不全，尤其“特征值为实数”和“可取 orthonormal eigenbasis”应明确。

2. (b)(iii) 把“列向量互相正交”误当成“矩阵正交”。正交矩阵要求 A^T A=I；本题 A^T A=9I，所以 A 不正交。

3. (c)(ii) “change of basis”不是题目要求的 Cartesian geometry 描述。应写成“scale by 3 plus reflection in plane x+y+z=0”。

得分：分项建议：Q7(a) 2.5/3；Q7(b) 8.0/10；Q7(c) 4.0/7。合计 14.5/20。

Q8 向量几何、平面与球面交线（20/20）

参考答案要点：

(a) 底面积为 4，高度为 d·zhat=1/√3，体积 V=4/√3=4√3/3。

(b)(i) 若平面过 a 且平行于 b,c，则单位法向 n^=(b×c)/|b×c|，平面为 r·n^=a·n^。

(b)(ii) 对 A=(1,1,3)，B=(0,2,1)，C=(0,1,2)，法向可取 (-1,1,1)，平面为 -x+y+z=3，即 (-1/3)x+(1/3)y+(1/3)z=1。

(c) 原点到平面的距离为 3/√3=√3，因此 R1=√3。若 R>√3，交线为圆，半径 √(R²-3)，长度 2π√(R²-3)。

学生核对：学生所有关键计算和几何解释均正确。写法较简洁，但没有影响理解和结果。

扣分点：无扣分。

得分：20.0 / 20

Q10 耦合 ODE 与 Chebyshev 型方程 (20/20)

参考答案要点：

(a) 由 $z' = y+2z$ 和 $y' + z' = 3y+3z$ 得 $y' = 2y+z$，所以 $[y,z]^T$ 的矩阵为 $[[2,1],[1,2]]$。特征值 3,1，对应向量 (1,1),(1,-1)。初值 (1,1) 只含 $\lambda=3$ 模式，所以 $y=e^{3x}$，$z=e^{3x}$。

(b)(i) 令 $x=\cos\theta$，则 $(1-x^2)y'' - xy' = d^2y/d\theta^2$，所以方程化为 $y_{\theta\theta}+n^2y=0$，即 $a=1,b=0,c=n^2$。

(b)(ii) $y=A\cos(n \arccos x)+B\sin(n \arccos x)$，或等价的振幅相位形式。

(b)(iii) $n=1$ 时两组独立解可取 $y=x$ 与 $y=\sqrt{(1-x^2)}$，在 $[-1,1]$ 上分别是直线和上半圆。

学生核对：学生 (a) 的矩阵特征值解法正确，初值代入正确。(b) 虽然中间推导有涂改，但最后得到 $y_{\theta\theta}+n^2y=0$，并给出正确的一般解与 $n=1$ 的两条独立曲线。

扣分点：无实质扣分。建议把链式法则推导写得更干净，但本题理解和结果完整。

得分：20.0 / 20

四、主要改进点

优先级	问题	具体改法
1	区分“orthogonal vectors”和“orthogonal matrix”	列向量两两点积为 0 还不够；还要每列长度为 1。检查矩阵正交性时直接算 A^T A 是否等于 I。本卷 Q7 中 A^T A=9I，所以 A 不是正交矩阵，A/3 才是。
2	几何变换题不能只写代数过程	题目若问“Cartesian geometry transformation”，必须说清楚对象：反射、旋转、投影、伸缩、剪切，以及对应的轴/平面/倍率。本卷 Q7 应写“关于 x+y+z=0 平面的反射，并整体放大 3 倍”。
3	复数题补条件	arg 公式要写 $z2 \neq 0$，并说明等式在 modulo 2π 下成立；ln 和 i^i 默认取 principal branch 时最好写明。
4	证明 vector space 时列清单	最稳模板：零元、加法封闭、数乘封闭、加法逆元、矩阵运算继承的公理。对于 subspace 反例，优先找“零元不在集合”或“不封闭”。
5	草图题要标关键几何信息	双曲线、圆锥曲线、相图等草图应标出开口方向、渐近线、旋转角、截距/顶点。Q4 的图已经表达了基本形状，但还可更像考试答案。

五、结论

建议总分：92.5 / 100。该答案显示出对 CP3 主要计算技术的熟练掌握，尤其是一阶 ODE、线性代数特征值方法、三维向量几何和变量替换。若按实际考试 moderation，分数可能因官方细则有 1-2 分微调，但本评估下属于非常稳的高分脚本。真正需要修补的不是算力，而是概念性文字：orthogonal matrix 的定义、几何变换描述、以及证明题中的条件完整性。