CP3 复习大纲

Linear Algebra, Complex Numbers, ODEs

从原 Markdown 拆分整理；本 PDF 只保留复习内容，不含 Mock 题目。

覆盖范围

根据现有 SelectedProblems 中 CP3 相关题目整理，重点覆盖：

- 线性代数：子空间、维数、正交/酉/厄米矩阵、特征值、基变换、矩阵递推。
- 复数：极形式、方程求根、Argand 图、三角恒等式。
- 常微分方程：一阶非线性、线性一阶、二阶线性、正交轨线。

一、完整复习大纲

1. 线性代数核心

1.1 向量空间与子空间

你必须能快速判断：

- 一个集合是否封闭于加法与数乘。
- 零向量是否在集合内。
- 是否能写成生成空间 $\operatorname{span}\{\cdots\}$ 或线性方程组解集。
- 平面/直线是否构成子空间。

必背结论

- 子空间必须包含零向量。
- 维数公式：
$$\dim(U+V)=\dim U+\dim V-\dim(U\cap V).$$
- 在 $\mathbb{R}^3$ 中，两平面作为子空间时，交集维数只能是 1 或 2；对应 $\dim(U+V)$ 分别为 3 或 2。

常见题型：

- 证明某集合是子空间。
- 由两个点/向量确定平面法向量。
- 求两平面的交线与点到交线的最短距离。

1.2 正交、叉积与平面几何

要掌握：

- $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的几何意义。

- 恒等式

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.$$

- 与某向量正交的所有向量构成子空间。
- 平面是否一定是子空间：不是，除非过原点。

做题套路：

1. 先找法向量。
2. 再把平面写成法向量方程。
3. 距离问题统一转成“点到直线/平面”的投影。

1.3 线性映射与矩阵性质

高频结论：

- AB 和 BA 具有相同的非零特征值。
- 如果 U,V 是酉矩阵，则 UV 仍是酉矩阵。
- 若 M 是 Hermitian，则 e^{iM} 是 unitary。
- 若 $M\boldsymbol{u}_i=\lambda_i\boldsymbol{u}_i$ 且 $M^\dagger\boldsymbol{v}_i=\lambda_i\boldsymbol{v}_i$，则 $\lambda_i^*\neq\lambda_j$ 时，$\boldsymbol{v}_i^\dagger\boldsymbol{u}_j=0$。

你要熟悉的矩阵类型：

- Orthogonal: $A^TA=I$。
- Unitary: $A^\dagger A=I$。
- Hermitian: $A^\dagger=A$。
- 常见推论：特征值在单位圆上、实数、共轭成对等。

1.4 基变换与对角化

核心公式：

$$A'=U^\dagger AU,\qquad \boldsymbol{x}'=U^\dagger\boldsymbol{x}.$$

你需要做到：

- 给出一个合适的 U。
- 找到变换后的 A' 与 $\boldsymbol{x}'$。
- 会用特征向量构造基。

1.5 递推与矩阵幂

重点：

- 把二阶递推写成一阶矩阵形式。
- 通过特征值判断极限。
- 处理“收敛到常数”的问题。

标准套路：

1. 写成 $\boldsymbol{v}_{n+1} = A\boldsymbol{v}_n$。
2. 求 A 的特征值/特征向量。
3. 将初值分解到特征基。
4. 观察模小于 1 的项消失。

2. 复数与三角技巧

2.1 极形式与求根

必须熟练：

$$z = re^{i\theta}, \qquad z^n = r^n e^{in\theta}.$$

n 次根有 n 个，角度相差 $2\pi/n$。

常见要求：

- 写出所有满足条件的复数。
- 在 Argand 图上标出位置。
- 解释为什么某些解集是圆、直线或射线。

2.2 复数方程的标准化

要熟悉：

- 把代数式变成模长与辐角。
- 利用共轭或实部条件把轨迹化简。
- 识别 Möbius 变换类型的题目。

2.3 二项式展开与三角恒等式

核心方法：

$$1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\theta/2}.$$

- 取虚部/实部得到求和公式。
- 利用 $\mathrm{Im}\{(1+e^{i\theta})^N e^{i\phi}\}$ 推出三角和式。
- 快速从复指数形式回到 sin/cos。
- 处理带相位 ϕ 的求和式。

3. 常微分方程

3.1 一阶线性方程

形式：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

标准工具：integrating factor；初值条件直接代入求常数。

3.2 一阶非线性方程

题里出现过两类：

- 可通过平移变量化简的分式型方程。
- 设 $p = dy/dx$ 后降阶的方程。

典型步骤：

1. 找平移点或不变量。
2. 改写为可分离变量。
3. 讨论解的多值性/非唯一性。

3.3 二阶线性方程

形式：

$$y'' + ay' + by = f(x).$$

要掌握：齐次解、特解猜测法、叠加原理、初始条件求常数。

3.4 正交轨线

题型特征：给出一族曲线的微分方程，要证明“同一点有两条曲线交成直角”。关键点：

- 若原方程给出斜率 m。
- 正交轨线斜率就是 $-1/m$。
- 代数上要把两个斜率乘出来等于 -1。

二、考前最后一晚的复习顺序

1. 先背结论：$\dim(U+V)$、AB/BA 特征值、unitary/Hermitian 定义。
2. 再做题型：子空间判定、正交矩阵、复数极形式、ODE。
3. 最后练一遍“变形模板”：
    - 平移坐标。
    - 改写成 $p = dy/dx$。
    - 矩阵递推写法。
    - $1 + e^{i\theta}$ 的标准化。

三、最短版公式清单

Core formulas

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V),$$
$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2,$$
$$A' = U^\dagger A U, \qquad \boldsymbol{x}' = U^\dagger \boldsymbol{x},$$
$$U^\dagger U = I, \qquad A^\dagger = A,$$
$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x),$$
$$1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\theta/2},$$
$$z = re^{i\theta} \Longrightarrow z^n = r^n e^{in\theta}.$$