CP3 Mock 卷

Questions only - no solutions included

建议时间：90–120 分钟 **总分：**100

本 PDF 只保留题目，不含答案或解题提示以外的完整解答。

Question 1: 复数与 Argand 图 [12]

1. 写出所有满足 $z^5 = -1 + i\sqrt{3}$ 的复数，并将它们在 Argand 图上表示出来。[6]
2. 求所有满足 $z = (2(1+i))^i$ 的值，并说明你如何处理多值辐角。[3]
3. 解方程 $\operatorname{Re}\left\{\dfrac{z-2}{z+2}\right\} = 0$，并说明解集在几何上的意义。[3]

Question 2: 三角和式 [10]

1. 证明
$$1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\theta/2}.$$
[2]
2. 由此证明
$$\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \sin(n\theta + \phi) = 2^N \cos^N\frac{\theta}{2}\, \sin\left(\frac{N\theta}{2} + \phi\right).$$
[6]
3. 当 $N = 4$, $\theta = \pi/3$, $\phi = 0$ 时，写出左边的具体数值。[2]

Question 3: 向量空间与子空间 [14]

1. 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义
$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{y} = 0, \qquad \lambda \odot \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}.$$
说明如何修改上式，使 $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$ 成为一个实向量空间。[4]
2. 证明 $W = \{(a,b,c) : a + b + c = 0\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间。[3]
3. 若 $Y = \{A : AT = TA\}$，其中 T 为固定 $n \times n$ 矩阵，证明 Y 是矩阵空间的子空间。[3]
4. 设 U, V 是 $\mathbb{R}^3$ 中的两个平面子空间，写出 $\dim(U+V)$ 与 $\dim(U \cap V)$ 的关系，并列出所有可能取值。[4]

Question 4: 线性代数几何题 [12]

1. 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$。说明它们张成的空间在 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行与不平行时维数分别是多少。[3]

2. 证明
$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2.$$
[4]

3. 证明所有与固定向量 $\boldsymbol{v}$ 正交的向量构成一个子空间，并说明“任意平面”是否都能构成子空间。[3]

4. 两个平面 U, V 分别经过点 $(1,0,1), (2,1,1)$ 与 $(0,1,1), (1,1,2)$。求它们交线的方向向量。[2]

Question 5: 正交/酉矩阵 [14]

1. 写出 orthogonal matrix 与 unitary matrix 的定义，并列出各自一个基本性质。[4]

2. 设
$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3x & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3y \\ 2 & 3z & 1 \end{pmatrix}$$
是 orthogonal matrix，求 x, y, z。[5]

3. 证明若 U, V 为 unitary，则 UV 仍为 unitary。[2]

4. 证明若 M 为 Hermitian，则 e^{iM} 是 unitary。[3]

Question 6: 特征值与基变换 [14]

1. 证明 AB 与 BA 有相同的非零特征值。[4]

2. 若 $M\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$ 且 $M^\dagger \boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$，证明当 $\lambda_i^* \neq \lambda_j$ 时 $\boldsymbol{v}_i^\dagger \boldsymbol{u}_j = 0$。[4]

3. 说明矩阵在酉变换下如何从 A 变为 A'，并写出向量坐标 $\boldsymbol{x}$ 的对应变换。[3]

4. 设
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 3 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = (1,1,1)^T,$$
说明如何选取一个对称的 unitary 矩阵 U 使 A 对角化。[3]

Question 7: 递推与极限 [10]

1. 设 $G_{n+2} = (G_{n+1} + G_n)/2$, $G_0 = 0$, $G_1 = 1$。写成矩阵形式 $\boldsymbol{v}_{n+1} = A\boldsymbol{v}_n$。 [3]

2. 求矩阵 A 的特征值，并说明为什么其中一个特征值控制极限。[4]

3. 证明 $G_n \to 2/3$。[3]

Question 8: 一阶与二阶常微分方程 [18]

1. 解
$$\frac{dy}{dx} + y\cot x = 1,$$
且满足 $y(\pi/2) = 2$。[6]

2. 解
$$y'' + 3y' + 2y = x + \sin x.$$
[6]

3. 解
$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\frac{dy}{dx} - x = 0,$$
并回答：穿过 (x, y) 平面中每个点 $(x \neq 0)$ 的 integral curve 有几条？为什么解不唯一？[6]

Question 9: 分式型 ODE 与正交轨线 [10]

1. 解
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x + 2y - 10}{2x - y - 3},$$
提示：先平移变量，使右边只依赖 Y/X。[5]

2. 设
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f(x, y)\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$
描述一族曲线，其中任意一点都通过两条曲线。证明这两条曲线在交点处正交。[3]

3. 对 $f = -2y/x$，在点 $(3, 4)$ 验证正交性。[2]

Question 10: 快速加分题 [6]

1. 设 M 是 $n \times n$ 的可逆矩阵，证明 $M^{-1}AM$ 与 A 相似。[2]

2. 说明为什么“平面经过原点”与“平面是子空间”是同一件事。[2]

3. 给出一个你最容易在 CP3 里丢分的步骤，并写一句防错规则。[2]

做题顺序建议

如果只做一轮，优先顺序建议：

1. Q5–Q6：矩阵与特征值。
2. Q3–Q4：子空间、正交、几何。
3. Q8–Q9：ODE。
4. Q1–Q2：复数与三角恒等式。
5. Q7：递推与极限。